

Διαφορικές Εξισώσεις Χωριζομένων Μεταβλητών - Ομογενείς

Στοιχειοθεσία: Δήμογλου Κωνσταντίνος, Μαθηματικός (MSc)

Άσκηση 1

Να επιλυθούν οι παρακάτω διαφορικές εξισώσεις.

(i) $(1 + y^2)y' - y^3 = 0$.

(ii) $y' = e^{x-y}$

(iii) $(y^2 - 1)dx + y(x - 1)dy = 0$

Άσκηση 2

Δίνεται η διαφορική εξίσωση

$$(E) \quad y' = ty(y - 2)$$

(i) Να εξετασθεί αν το π.α.τ (E) και $y(1) = 2$ έχει μοναδική λύση.

(ii) Να δείξετε ότι όλες οι λύσεις της εξίσωσης συγκλίνουν, όταν $t \rightarrow +\infty$.

Άσκηση 3

Να λυθούν τα παρακάτω π.α.τ

(i) $y' = \frac{3t^2 + 4t + 2}{2(y - 1)}, y(0) = -1, t \geq 0$

(ii) $y' = -1 + \sqrt{x + y - 3} \quad y(0) = 4$

(iii) $x(1 - 2xy)dy + (1 + 2xy)dx = 0 \quad y(1) = 1$

Επιπλέον, εξετάστε αν υπάρχει λύση της εξίσωσης του ζητήματος (iii) τέτοια ώστε να είναι μονότονη και φραγμένη στο $(0, +\infty)$.

Άσκηση 4

Θεωρούμε το π.α.τ

$$(x^2 + y^2) dx + 2xy dy = 0, \quad y(1) = 0$$

Να εξετασθεί η αλήθεια των ισχυρισμών:

(i) Το πρόβλημα έχει ακριβώς μια λύση.

(ii) Το πεδίο ορισμού της λύσης (ή των λύσεων) του π.α.τ είναι κλειστό διάστημα.

Άσκηση 5

Θεωρούμε τη διαφορική εξίσωση

$$y' = \frac{x^3 + y^3}{xy^2}$$

(i) Να λύσετε την παραπάνω εξίσωση.

(ii) Εξετάστε αν όλες οι λύσεις της εξίσωσης είναι φραγμένες στο $(0, +\infty)$

(iii) Εξετάστε αν υπάρχουν ταλαντούμενες λύσεις της εξίσωσης στο $+\infty$.

Άσκηση 6

Θεωρούμε τη διαφορική εξίσωση

$$(x + y) dx + (y - x) dy = 0, \quad x > 0$$

- (i) Να λύσετε την παραπάνω εξίσωση.
- (ii) Εξετάστε αν υπάρχει φραγμένη λύση της εξίσωσης.

Άσκηση 7

Να επιλυθούν οι παρακάτω διαφορικές εξισώσεις:

$$(i) \quad y' = \frac{-x + 3y + 2}{2x - 6y - 1}$$

$$(ii) \quad y' = \frac{x - y + 1}{x + y - 3}$$

$$(iii) \quad y' = \frac{x + y + 1}{x + 2} - e^{\frac{x+y+1}{x+2}}$$

Only Maths

-Official-